

CHAPITRE 1: Les nombres complexes

Certaines élèves ont des difficultés pour comprendre le début des cours sur les complexes cela est normal car survient une rupture dans la compréhension des ensembles.

En fait, cette nouveauté dans la compréhension des mathématiques n'est pas une première car dans les classes antérieures aussi ils ont étudié certaines nouvelles choses dans les ensembles.

Dans les classes précédentes on a vu l'ensemble $\mathbb{N}$ où l'on pouvait résoudre les équations de type $x + 3 = 7$: La solution est $x = 4$. Cependant dans cet ensemble les équations de type $x + 3 = 0$ n'ont pas de solution d'où l'idée d'étendre l'ensemble des nombres : dans $\mathbb{Z}$ la solution est $x = -3$.

De même les équations type $3x + 4 = 0$ à nécessiter le recours à un nouvel ensemble $\mathbb{Q}$ où la solution est $x = -4/3$. Mais les équations de type $x^2 - 3 = 0$ n'y avaient pas de solution d'où le recours à l'ensemble $\mathbb{R}$ avec la racine carrée d'un nombre la solution était ainsi trouvée $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Cependant, les équations de type $Z^2 + 1 = 0$ plus proche de la précédente n'y avaient pas de solution dans $\mathbb{R}$ d'où le recours aux nombres complexes $\mathbb{C}$ dans lequel il existe un imaginaire i tel que $i^2 = -1$: Les solutions de $Z^2 + 1 = 0$ sont i et $-i$.

Les équations du second degré dont le discriminant Δ est négatif et bien d'autres encore sont résolues dans $\mathbb{C}$. C'est cet ensemble des nombres complexes que nous étudierons dans ce chapitre.

I) Forme algébrique d'un nombre complexe :

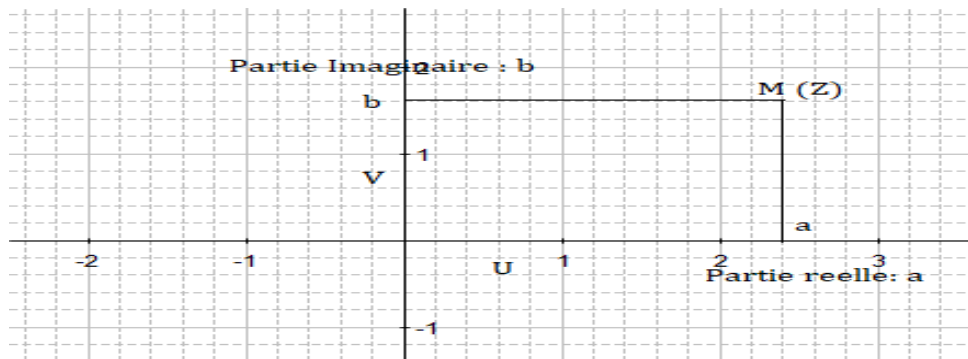
1. **Définition** : Tout nombre écrit sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et i tel que $i^2 = -1$ est sous forme algébrique.

a est appelé partie réelle et noté $\text{Re}(Z)$ et b est la partie imaginaire noté $\text{Im}(Z)$.

N.B : Tout réel est aussi un complexe dont la partie imaginaire est nulle c'est - à - dire $\text{Im}(Z) = 0$. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. **Représentation graphique de l'image M d'un complexe $Z = a + ib$:**

C'est le point de coordonnées $M(a; b)$, Z est appelé l'affixe du point M et M est dit l'image du complexe Z .



Propriété :

Si Z et Z' sont deux complexes tels que $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

On a : $Z = Z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$: c'est - à - dire si les parties réelles et imaginaires sont égaux entre eux.

3. **Conjugué d'un nombre complexe**

Définition : Soit le complexe $Z = a + ib$ on appelle conjugué de Z le nombre complexe $\bar{Z}$ tel que : $\bar{Z} = a - ib$.

Interprétation géométrique du conjugué :

Les images d'un complexe Z et son conjugué $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ou axe des réels.

Exemples : Les conjugués de $3 + 2i$; de $5i$ et de 2 sont respectivement $3 - 2i$; $-5i$ et 2 .

Propriétés : Pour tout nombre complexe Z , tel que $Z = a + ib$:

$$P_1 : \bar{\bar{Z}} = Z. \quad P_2 : Z + \bar{Z} = 2\text{Re}(Z) \text{ ou } Z + \bar{Z} = 2a.$$

$$P_3 : Z \times \bar{Z} = [\text{Re}(Z)]^2 + [\text{Im}(Z)]^2 \text{ c'est - à - dire que : } Z \times \bar{Z} = a^2 + b^2.$$

$$P_4 : Z - \bar{Z} = 2\text{Im}(Z) \text{ ou } Z - \bar{Z} = 2ib.$$

$$P_5: \begin{cases} Z \text{ est reel si et seulement si } Z = \bar{Z} \\ Z \text{ est imaginaire pure si et seulement si } Z = -\bar{Z}. \end{cases}$$

P₆ : Pour tout Z et $Z' \in \mathbb{C}$.

$$i) \overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}; \quad ii) \overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z'}; \quad iii) \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}.$$

Règle : Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : $Z = \frac{4+2i}{2-3i} = \frac{(4+2i)}{(2-3i)} \times \frac{(2+3i)}{(2+3i)} = \frac{8+12i+4i-6}{4+9} = \frac{2+16i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{16}{13}i.$

$$\text{On a : } \operatorname{Re}(Z) = \frac{2}{13} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = \frac{16}{13}.$$

4. Inverse et opposé d'un complexe :

a) **Définition :** On appelle inverse d'un complexe Z non nul le complexe $\frac{1}{Z}$.

Propriété : Si $Z = a + ib$ on a : $\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{\bar{Z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$

b) Opposé d'un complexe :

Soit un complexe Z s'écrivant sous la forme $Z = x + iy$ l'opposé de Z noté $-Z = -x - iy$.

Propriété : $Z + \text{opposé de } (Z) = 0$.

Interprétation géométrique de l'opposé.

Les images d'un complexe et de son opposé sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

5. Puissance d'un nombre complexe :

Définition : Z étant un complexe non nul.

a- $Z^0 = 1$; b- $0^n = 0$; c- $Z^{n+1} = Z^n \times Z$; d- $Z^{-n} = \frac{1}{Z^n}$;

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a : a) $i^{4n} = 1$; b) $i^{4n+1} = i$; c) $i^{4n+2} = -1$; d) $i^{4n+3} = -i$.

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

Exemple : Développer $(2-i)^4$.

$$(2-i)^4 = C_4^0 2^4 (-i)^0 + C_4^1 (2)^3 (-i)^1 + C_4^2 (2)^2 (-i)^2 + C_4^3 (2)^1 (-i)^3 + C_4^4 (2)^0 (-i)^4 =$$

$$(2-i)^4 = 16 - 32i - 24 + 8i + 1 = -7 - 16i.$$

6. Module et argument d'un nombre complexe :

a- Du module

Définition :

Soit le complexe $Z = a + ib$.

On dit que le réel $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module de Z et on note $|Z| = r$: C'est géométriquement dans le plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ la distance qui sépare l'image du point M d'affixe $Z = a + ib$ à l'origine O du repère.

Propriétés :

P₁ : $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$; **P₂ :** $|Z| = |-Z| = |\bar{Z}| = |-\bar{Z}|$; **P₃ :** $|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}}$.

P₄ : $\operatorname{Re}(Z) \leq |Z|$ et $\operatorname{Im}(Z) \leq |Z|$; **P₅ :** $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ inégalité triangulaire.

P₆ : $|ZZ'| = |Z| \times |Z'|$;

Pour tout complexe $Z' \neq 0$ **P₇ :** $\left|\frac{1}{Z'}\right| = \frac{1}{|Z'|}$; **P₈ :** $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$;

Pour tout entier naturel n et m : $|Z^n| = |Z|^n$ et $|Z^n| \times |Z^m| = |Z|^{n+m}$.

b- De l'argument

Soit le point M d'affixe $Z = a + i b$, l'argument de Z est géométriquement dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté $(\overrightarrow{Ou}; \overrightarrow{OM})$.

On note : $\text{Arg}(Z) = (\overrightarrow{Ou}; \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés :

P₁ : $Z = Z'$ si et seulement si $|Z| = |Z'|$ et $\arg(Z) = \arg(Z') + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

P₂ : $\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z') + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Pour Z' non nul : **P₃ :** $\arg\left(\frac{1}{Z'}\right) = -\arg(Z') + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, et

P₄ : $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

P₅ : $\arg(Z^n) = n \arg(Z) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Calcul d'arguments de complexes :

1) Connaître la table des valeurs remarquables.

2) Maîtriser les techniques de résolution d'équations trigonométriques $\cos(x) = \alpha$ et $\sin x = \beta$ et que $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos(x)$

Angle α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cos (α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sin (α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les autres valeurs se déduisent aisément à partir des valeurs remarquables.

Exemple : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

II) Forme trigonométrique d'un complexe :

Définition : Soit le nombre complexe non nul Z, la forme trigonométrique de Z est son écriture sous la forme $Z = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

Propriété : Pour tout nombre complexe Z non nul de module r et d'argument θ l'écriture de Z la forme $Z = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$ est la forme trigonométrique du complexe Z.

Exercice : Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}; Z_2 = -1 + i\sqrt{3}; Z_3 = -2 - 2i \text{ et } Z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Solution :

- $Z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$. car $|Z_1| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ et $\arg(Z_1) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
- $Z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$. $Z_3 = -2 - 2i = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \right]$.
- $Z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$.

III) Formes exponentielle d'un complexe :

La troisième forme de notation du complexe Z est la forme exponentielle.

Définition : Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ peut se noter $r e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$, et $\theta \in \mathbb{R}$; e est un nombre et se lit exponentielle : $e \approx 2,718$.

Exemple : $Z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Propriétés : Pour tout complexe non nul Z et Z' et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

- Si $Z = e^{i\theta}$ alors $|Z| = r = 1$.

- $\left(\overline{re^{i\theta}}\right) = re^{-i\theta} = r \times \frac{1}{e^{i\theta}}$. Si $r = 1$ alors $\left(\overline{e^{i\theta}}\right) = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.
- Si $Z = r e^{i\theta}$ et $Z' = r' e^{i\theta'}$ alors $ZZ' = rr' e^{i(\theta+\theta')}$. $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$; $Z^n = r^n e^{in\theta}$.

IV) Autres formules et leurs applications a la trigonométrie :

1) Formule de Moivre :

On a : $\cos(\theta) + i \sin(\theta) \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ d'où:

a- La formule de Moivre :

Pour tout nombre réel θ et tout entier relatif n , $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

b- Application :

Pour écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exemple : $(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = ((\cos \theta) + i \sin(\theta))^4 =$

$$\cos^4 \theta + 4 \cos^3 \theta \cdot (i \sin \theta) + 6 \cos^2 \theta \cdot (i \sin \theta)^2 + 4 \cos \theta \cdot (i \sin \theta)^3 + (i \sin \theta)^4 =$$

$$[\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta] + i[4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta]$$

Donc $\cos(4\theta) = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta = 1 - 8 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 8 \cos^4 \theta$.

Et $\sin(4\theta) = 4 \cos \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta = 2 \sin(2\theta)(1 - 2 \sin^2 \theta)$
 $= 2 \sin 2\theta - 4 \sin 2\theta \sin^2 \theta$.

2) Formules d'Euler :

a- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

b- Applications des formules :

Ces formules sont utilisées pour linéariser les fonctions trigonométriques écrites sous forme $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$.

Exemple : Linéarisons $\cos^4(\theta)$:

$$\cos^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta} \cdot e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta} \cdot e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta} \cdot e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta} + 6) = \frac{1}{16} (2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6) = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Quelques formules :

a- $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = -2ie^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b- $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

V) Résolutions d'équations complexes :

1) Opérations dans $\mathbb{C}$:

a- Équations de type $aZ^2 + bZ + c = 0$; a, b et c sont trois nombres réelles :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ (E) : $x^2 + 1 = 0$ et (F) : $x^2 + x + 1 = 0$.

(E) : $x^2 + 1 = 0$ donne $x^2 = -1 = i^2$ implique $x = +i$ ou $x = -i$.

(F) : $x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc, $\Delta = 3i^2$.

$$x' = \frac{-1 - \sqrt{3i^2}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, x'' = \frac{-1 + \sqrt{3i^2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. S = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

b- Équation de type $\frac{a+biz}{cz} = z'$ et $(a+ib)z = \bar{z} + a' + ib'$ avec a, b, a' et $b' \in \mathbb{R}$.

i) Résoudre : $\frac{1+2iz}{z} = 1-2i \Leftrightarrow 1+2i = (1-2i)z \Leftrightarrow (1-2i)z - 2iz = 1 \Leftrightarrow z[1-2i-2i] = 1$

$$z(1-4i) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-4i} \times \frac{1+4i}{1+4i} = \frac{1}{17} + \frac{4}{17}i.$$

ii) Résoudre : $(3-2i)z = \bar{z} - 2 - 16i$.

Solution : Posons d'abord $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

$$(3-2i)z = \bar{z} - 2 - 16i \Leftrightarrow (3-2i)(x+iy) = x-iy-2-16i \Leftrightarrow 3x+3iy-2ix+2y = x-iy-2-16i \Leftrightarrow$$

$$3x+2y-x+2+i(-2x+3y+y+16)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+2=0 \\ -2x+4y+16=0 \end{cases} \text{ D'où } x=2 \text{ et } y=-3. \text{ Par suite } Z=2-3i.$$

2) Racine n^{ième} d'un nombre complexe

a) Cas général :

Définition : n est un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe, on appelle racine n^{ième} de Z le complexe z' tel que $(z')^n = Z$.

Recherche les racines n^{èmes} de $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Posons $z' = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$\Leftrightarrow (z')^n = \rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \text{ on a } (z')^n = Z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\alpha = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Propriété : Tout complexe non nul $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ admet n racines n^{ième} qui s'écrivent sous la

$$\text{forme : } z = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; 3; 4; \dots; (n-1)\}$$

et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

Interprétation géométrique : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points images des n - racines

n^{ième} sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Si n = 2 les points images des 2 racines carrées sont diamétralement opposées sur (C).

Si n > 2 les points images des n - racines n^{ième} sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrits dans le cercle (C).

Exercice : Déterminer les racines cubiques de l'unité $Z = 1 = (\cos 0 + i \sin 0)$ donc $|Z| = 1$;

Soit z' les racines cubiques $z' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ tel que $(z')^3 = Z$.

$$(z')^3 = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^3 = r^3 (\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \Leftrightarrow r = 1 \\ 3\alpha = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3}; k \in \{-1; 0; 1\} \end{cases}$$

$$\text{Si } k = 0 \text{ alors } z'_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1; \text{ Si } k = 1 \text{ alors } z'_2 = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Si } k = -1 \text{ alors } z'_3 = \cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

b) Les racines carrées d'un complexe :

Soit $Z = a + ib$ et $z = x + iy$. On appelle racines carrées du complexe Z les complexes z tel que : $Z = z^2$. La résolution revient à poser $(x + iy)^2 = a + ib$.

$$\begin{cases} |z|^2 = |Z| & (1) \\ (\operatorname{Re}(z))^2 - (\operatorname{Im}(z))^2 = \operatorname{Re}(Z) & (2) \\ 2 \operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(Z) & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

Exemple : Déterminer les racines carrées du complexe : $1 + i\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 1 & (2) \\ 2xy = \sqrt{3} & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) + (2) \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}; x = -\sqrt{\frac{3}{2}}. \\ (1) - (2) \Leftrightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ (3) \text{ indique que } x \text{ et } y \text{ sont de meme signe} \end{cases}$$

Les 2 racines sont $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

c) Les lieux géométriques

Soit M, A et B les points d'affixes respectives z, a et b ou plus explicitement M (z) ; A (a) et B (b).

- $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$ réel : M est sur la droite (AB) privé du point B.
 - $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}^*$ imaginaire pur : M est sur le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
 - Ensemble des points M tel que : $|z-a| = r$ avec $r > 0$: M est sur le cercle de centre A et de rayon r.
 - $|z-a| = |z-b|$: M est sur la médiatrice du segment [AB].
- Pour toute la suite $k \in \mathbb{Z}$.
- a) $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0 + 2k\pi$: M est sur le segment [AB] privé des points A et B.
 - b) $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = k\pi$: M est sur la droite (AB) privée du points B.

$$* \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi :$$

M est sur le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

EXERCICES SUR LES COMPLEXES

Exercice 1

1. Déterminer l'argument et le module des complexes ci - après :

$$a - Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad b - Z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad c - Z_3 = 2i; \quad d - Z_4 = 2 - 2i;$$

$$e - Z_5 = 1 - i; \quad f - Z_6 = (2 - 2i)(1 - i); \quad g - Z_7 = -2ie^{i\theta} \sin(2\theta) \cos(\alpha)$$

Avec θ et $\alpha \in [0; \pi/6]$.

2. Dans chacun des cas reconnaitre la transformation géométrique t dont l'écriture complexe est :

$$a - Z' = Z + 1 + 2i; \quad b - Z' = e^{i\frac{\pi}{5}} Z; \quad c - Z' = Z - 3i$$

$$d - Z' = -iZ; \quad e - Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)Z; \quad f - Z' = \frac{1}{2}(1 + i)Z.$$

Exercice 2

$$\text{On donne } Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

1. Ecrire Z sous la forme trigonométrique.
2. En déduire l'écriture de Z sous forme exponentielle.
3. Calculer Z^{2016} et Z^{2017} .
4. En déduire une comparaison de Z^{2017} et Z.

Exercice 3

Le plan est rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ unité 1 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $Z_C = 2$.

1. a – Vérifier que $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 b- En déduire la nature du triangle ABC.
 c- Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
2. a – Établir que l'ensemble (C₂) des points M d'affixe Z qui vérifient : $2(Z + \bar{Z}) + Z\bar{Z} = 0$ est un cercle de centre I d'affixe - 2. Préciser son rayon.
 b- Vérifier que les points A et B sont éléments de (C₂).
3. On donne le point D d'affixe - 4.
 a- Interpréter géométriquement la module et l'argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}$.
 b- En déduire la nature exacte du quadrilatère ACBD.

Exercice 4

Soit le nombre complexe $Z = \frac{z}{z-1}$ où z est un nombre complexe différent de 1.

1. a – Pour $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, écrire Z sous forme algébrique.
 b- Montrer que si Z est réel alors z est aussi réel.
2. On pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ avec x ; y ; X et Y des réels.
 Montrer que $X = \frac{x^2 + y^2 - x}{(x-1)^2 + y^2}$ et $Y = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$.
3. On rapporté à un repère orthonormé le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 a- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que Z soit un réel.
 b- Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pure.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne unité graphique 4 cm.

Soit f la fonction qui, à tout nombre complexe z différent de - 2 i, associe : $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.

1. Déterminer :
 a- L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.
 b- L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.
 c- L'ensemble G des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
2. Déterminer les ensembles E, F et G sans utiliser les parties réelle et imaginaire de Z.
3. Représenter ces trois ensembles.
4. Calculer $|Z-1| \times |z+2i|$ et en déduire que les points M₀ d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ sont tous sur un même cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives i, 1 + i et 1 - i.

On appelle f l'application du plan privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq i$)

associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z^2}{1-z}$.

1. a – Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
 Que peut-on dire des points B et C ?
 b- Déterminer les affixes des points B' et C' images de B et C par l'application f.
 Placer ces points.

2. Déterminer les affixes des points invariants par f (les points M vérifiant $f(M) = M$).
3. L'application f conserve-t-elle l'alignement ? le milieu ?
4. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' des réels.

a- Démontrer que : $x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}$.

- b- En déduire l'ensemble E des points $M(z)$ tels que z' soit un imaginaire pur.
Représenter l'ensemble E .

Exercice 7

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le polynôme $P(z)$ défini par tout élément z de $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 5(1+i)z^2 - 2(1-9i)z + 16 - 8i.$$

1. a - Montrer que $P(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on calculera.
b- Déterminer le polynôme $q(z)$ tel qu'on ait $P(z) = (z - z_0)q(z)$.
Achevez de résoudre $P(z) = 0$, On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions tel que $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$ où $\text{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z .
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = z_1$; $z_B = z_0$ et $z_C = \overline{z_2}$.
a- Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
b- En déduire la nature du triangle ABC .
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$; M et M' les points d'affixes respectives z et z' tel que M' soit l'image du point M par la translation t .
a- Exprimer z' en fonction de z .
b- Calculer l'affixe de z_D image de C par la translation t .
c- Donner la nature exacte du quadrilatère $ABDC$.

Exercice 8

1. On considère le polynôme $P : P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$.
a- Déterminer le nombre réel α tel que αi soit solution de l'équation $P(z) = 0$.
b- Trouver deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z , on ait :
 $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.
c- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Unité 1 cm.
a- Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$; $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
b- Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
c- Placer le point C d'affixe $z_C = 1 + i$. Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.
d- Placer le point D d'affixe $z_D = 1 + 11i$. Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

SUJETS TYPES BAC

Sujet type 1

Exercice 1 :

Dans une loterie on distingue deux séries de tickets gagnant : A et B.

La série A compte 12 tickets dont 4 gagnants, la série B compte 15 tickets dont 5 gagnants.

Une personne achète 3 tickets dont 2 de la série A et 1 de la série B.

1. Quels sont les choix possibles.
2. a – Quelle est la probabilité qu'il obtienne un ticket gagnant ?
b- Soit A l'événement : « obtenir au moins un ticket gagnant.
Calculer $P(A)$ de deux manières distinctes.
3. Un ticket gagnant de la série A gagne 2500 \$ et un ticket gagnant de la série B gagne 5000 \$.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à l'achat de 3 tickets (2 de la série A et 1 de B)
Le gain réalisé :
a- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
b- Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne unité graphique 4 cm.

Soit f la fonction qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe : $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.

5. Déterminer :
d- L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.
e- L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.
f- L'ensemble G des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
6. Déterminer les ensembles E, F et G sans utiliser les parties réelle et imaginaire de Z.
7. Représenter ces trois ensembles.
8. Calculer $|Z-1| \times |z+2i|$ et en déduire que les points M d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ sont tous sur un même cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour n'importe quel réel x par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

Partie A :

Soit la fonction h deux fois dérivables définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. a – Calculer $h'(x)$ puis $h''(x)$.
b- Déterminer le signe de $h''(x)$ et prouver que h' est croissante sur $[0; +\infty[$.
c- En remarquant que $h'(0) = 1$ montrer que h est croissante sur $[0; +\infty[$ et calculer h(0).
2. En déduire que pour tout réel positif ou nul x : $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.
3. a – Montrer que x = 0 est solution de l'équation $g(x) = 0$.
b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α sur l'intervalle $] -1,6; -1,5 [$
c- Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie C :

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$. Déduire de la partie B le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est définie dans la partie précédente. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Unité graphique : 2 cm).

Sujet Type 2

Exercice 1

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$: (E) : $Z^3 - 3iZ^2 - (3-i)Z + 2 + 2i = 0$.

1. Montrer que (E) admet une racine réelle Z_0 que l'on déterminera.
2. Terminer la résolution de (E), on rappelle que (E) admet 3 racines.
3. On considérant Z_A, Z_B et Z_C les affixes respectives des points A, B et C tels que Z_A la racine réelle et Z_B la racine imaginaire pure.
Placer les points A, B et C dans un repère orthogonal unité 2 cm.
4. a - Calculer $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.
b- Déterminer et interpréter $|Z|$.
c- En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 2

1. On considère l'équation différentielle (E₁) : $y' + ay = b$ où a et b sont deux réels non nuls.

On pose $Z = y - \frac{b}{a}$.

- a- Déterminer une équation différentielle (E₂) satisfaite par Z .
 - b- Résoudre l'équation (E₂) et en déduire les solutions de l'équation (E₁).
2. On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, telle que : $f'(x) + 2f(x) = [f(x)]^2$, pour tout réel x .

- a- Soit f une fonction solution de (E), démontrer que la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, (a et b réels non nuls).

- b- En déduire que les fonctions solution de (E) sont les fonctions $x \mapsto \frac{2}{2ke^{2x} + 1}$ où k est un réel strictement positif.

Exercice 3

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x[1 - \ln(x)]^2 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Construire (C).

Partie B :

1. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; e[$.
Calculer à l'aide de deux intégrations par parties, l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (OI), les droites d'équations $x = \alpha$, $x = e$ et la courbe (C).
2. Calculer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et la droite d'équation $y = x$.
4. Pour quelle valeur de α la droite (D_α) d'équation $y = \alpha x$, recoupe-t-elle la courbe (C) en deux points M et M' distincts ou confondus autre que O ?

Partie C :

1. Démontrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $[e; +\infty[$ admet une application réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
2. a- g^{-1} est-elle dérivable en e ?
b- Calculer l'image en e^2 par g^{-1} .
3. Construire la représentation graphique de g^{-1} notée (C') .