

SCIENCES DE LA VIE

CHAPITRE 9

PROBABILITÉS

I- Expérience aléatoire – événement

On appelle expérience aléatoire toute expérience qui, renouvelée dans les mêmes conditions, ne donne pas à chaque essai les mêmes résultats. Les résultats possibles de cette expérience aléatoire sont appelés les issues. L'ensemble des issues est appelé univers de l'expérience aléatoire.

Dans toute la suite, on se placera toujours dans le cas où Ω est fini.

Toute partie de Ω est appelé événement.

L'événement $\emptyset$ est appelé événement impossible et Ω est appelé l'événement certain.

Un événement comprenant un seul élément s'appelle événement élémentaire.

Si A et B sont deux événements.

- L'événement « A ou B » est $A \cup B$, $A \cup B$ correspond donc à « A est réalisé ou B est réalisé »
- L'événement « A et B » est $A \cap B$, $A \cap B$ correspond donc à « A est réalisé et B est réalisé »
- L'événement contraire de A est le complémentaire de A dans Ω , noté $\bar{A}$.
- A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

On appelle système complet d'événements de Ω toute famille finie d'événements $A_1, \dots, A_n$ vérifiant :

- Les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$;
- Leur réunion est Ω : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \dots \dots A_n = \Omega$.

II- Probabilité de la réunion de deux événements

Soient A et B deux événements : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

III - Événement contraire :

Soit un événement A. La probabilité de son événement contraire est égale à : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- $A \cup \bar{A} = \Omega$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

IV - Probabilité d'un événement

Une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale à :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ où } \text{card}(A) = \text{Nombre d'éléments de A et } \text{card}(\Omega) = \text{Nombre d'éléments de } \Omega.$$

V - Probabilités conditionnelles :

Définition :

On considère deux événements A, tel que $P(A) \neq 0$, et B.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre : $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P\left(\frac{B}{A}\right) \times P(A) = P\left(\frac{A}{B}\right) \times P(B).$$

VI- Formules des probabilités totales :

Définition :

On considère un entier naturel n non nul.

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un système complet d'événements fini ou une partition de l'univers Ω si :

1. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $P(A_i) \neq 0$;
2. Les événements A_i sont disjoints deux à deux ; (c'est - à - dire $A_i \cap A_j = \emptyset$)
3. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \dots \dots \cup A_n = \Omega$.

VII - Probabilités totales - cas général :

On considère les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ formant un système complet d'événements fini et un événement B :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n).$$

VIII – Indépendance :

Définition : On dit que deux événements A et B sont indépendants si la probabilité de l'un ne change pas, que l'autre réalisé ou non, c'est-à-dire que : $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$ ou $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$.

Si A et B sont deux événements indépendants, alors : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

IX – Combinaisons Soit E un ensemble formé de n éléments et p un entier naturel inférieur ou égal à n . On appelle combinaison de p éléments distincts de E , toute partie de E formée de p éléments. Une telle combinaison est aussi appelée une combinaison de p éléments parmi n , ou une combinaison de n objets p à p . Le nombre de ces combinaisons sera noté C_n^p .

Exemple

$C_n^0 = 1$, Car E possède une seule partie formée de zéro élément (partie vide).

$C_n^1 = n$, Car E possède n parties formées d'un élément.

$C_n^n = 1$, Car E possède une seule partie formée de n éléments.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls ($p \leq n$).

Le nombre des combinaisons de n objets p à p est donné par la formule :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\dots 2 \times 1}.$$

Pour deux entiers naturels n et p ($p \leq n$), nous avons $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

X- Formule du Binôme : Si a et b sont deux nombres et n est un entier naturel non nul, alors

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

XI - Variable Aléatoire Discrète Et Loi De Probabilité

- Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire définie sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Lorsque Ω est fini, la variable aléatoire est dite discrète.

- On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire toute application p définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ à valeurs dans $[0; 1]$ telle que :

$$p(X = x_1) + p(X = x_2) + \dots + p(X = x_n) = 1.$$

XII- Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow F(x) = p(X \leq x).$$

XIII - Moyenne, Variance Et Ecart-Type D'une Variable Aléatoire

- Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs possibles d'une variable aléatoire X et $p_1, \dots, p_n$ leurs probabilités correspondantes.

L'espérance mathématique de X est le nombre réel noté $E(X)$ et défini par

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \overline{X}.$$

- La variance de X , d'espérance mathématique m , est le nombre réel positif noté $\text{Var}(X)$ et définie par :

$$\text{Var}(X) = p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2 - m^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m^2.$$

- L'écart type d'une variable aléatoire X est la racine carrée positive de sa variance. On le note

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)}.$$

Exemple 1

Dans une entreprise, on s'intéresse à la répartition des hommes et des femmes selon les trois catégories salariales : Ouvrier, agent et cadre.

	Homme	Femme	Total
Ouvrier	34,1 %	15,9 %	50 %
Agent	17,4 %	12,6 %	30 %
Cadre	6,5 %	13,5 %	20 %
Total	58 %	42 %	100 %

On choisit au hasard une fiche d'un employé et on considère les événements suivants :

F : « la fiche choisie est celle d'une femme »

H : « la fiche choisie est celle d'un homme »

O : « la fiche choisie est celle d'un ouvrier »

A : « la fiche choisie est celle d'un agent »

C : « la fiche choisie est celle d'un cadre »

Calculer les probabilités des événements F, H, O, A, C, $C \cap F$, $O \cap F$, et $A \cap H$.

Solution :

$$P(F) = 0,42, P(H) = 0,58, P(O) = 0,5, P(A) = 0,3, P(C) = 0,2, P(C \cap F) = 0,135, P(O \cap F) = 0,159, P(A \cap H) = 0,174.$$

Exemple 2

Une urne contient cinq boules rouges numérotées 0, 0, 1, 2 et 3 et quatre boules vertes numérotées 0, 0, 2 et 3.

1. Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir une seule boule rouge »

B : « Obtenir une seule boule portant le numéro 0 »

C : « Obtenir une seule boule rouge portant le numéro 0 ».

2. On tire au hasard, successivement sans remise deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir une seule boule portant un numéro pair »

B : « La première boule tirée est rouge »

Solution :

$$1. P(A) = P(RVV) = \frac{C_5^1 \times C_4^2}{C_9^3} = \frac{6 \times 5}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}. P(B) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}.$$

$$P(C) = \frac{C_2^1 \times C_7^2}{C_9^3} = \frac{2 \times 21}{84} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}.$$

$$2. P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times 2 = \frac{5}{9}; P(B) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}.$$

Exemple 3

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.

1. On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir :

a) Une boule blanche puis une boule noire.

b) Une boule noire puis une boule blanche.

c) Deux boules de couleurs différentes.

2. L'épreuve consiste maintenant à tirer successivement et au hasard deux boules de l'urne de la manière suivante :

- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne, puis on tire une seconde boule.
- Si la boule tirée est noire, on la garde, puis on tire une seconde boule de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) Une boule blanche puis une boule noire.
- b) Une boule noire puis une boule blanche.
- c) Deux boules de couleurs différentes.

Solution :

$$1. \text{ a) } P(\text{Blanche puis noire}) = \frac{A_3^1 \times A_5^1}{A_8^2} = \frac{15}{56}.$$

$$\text{b) } P(\text{Noire puis blanche}) = \frac{A_5^1 \times A_3^1}{A_8^2} = \frac{15}{56}.$$

$$\text{c) } P(\text{Deux boules de couleurs différentes}) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}.$$

$$2. \text{ a) } P(\text{Blanche puis noire}) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}.$$

$$\text{b) } P(\text{Noire puis blanche}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}.$$

$$\text{c) } P(\text{Deux boules de couleurs différentes}) = P(\text{a}) + P(\text{b}) = \frac{15}{64} + \frac{15}{56} = \frac{225}{448}.$$