

ECONOMIES ET GESTIONS

CHAPITRE 7

SUITES NUMÉRIQUES

1. Généralités

1.1 Définition :

On appelle suite réelle toute famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée sur $\mathbb{N}$ ou, de manière équivalente, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1.2 Vocabulaire :

Une suite (U_n) est constante s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = C$. Une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

On dit qu'une suite (U_n) est majorée (resp. Minorée) s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq C$ (resp. $u_n \geq C$).

On dit qu'une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

1.3 Sens de variation :

Soit (U_n) une suite réelle. Alors

- (U_n) est croissante si et seulement si pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n \geq 0$.
- (U_n) est décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

Exemple 1 :

Soit (U_n) est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 3n - 5$.

La suite (U_n) est croissante car : $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) - 5 - 3n + 5 = 3n + 3 - 5 - 3n + 5 = 3 > 0$

Exemple 2 :

Soit (V_n) est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = U_n - 5$.

La suite (V_n) est décroissante car : $U_{n+1} - U_n = U_n - 5 - U_n = -5 < 0$.

Remarque :

On peut aussi définir une suite strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

Propriété 1 : Pour étudier les variations de la suite (U_n) , il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

- Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors (U_n) est croissante.
- Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors (U_n) est décroissante.

Propriété 2 : Soit (U_n) une suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (U_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (U_n) est décroissante.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse.

2. Suites arithmétiques

2.1 Définition, exemples

Définition :

On dit qu'une suite (U_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r . on a donc : Le réel r est alors appelé raison de la suite.

Exemples :

1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, est arithmétique de raison 5.
2. La suite définie par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 3$ est arithmétique de raison (-3).
3. La suite des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, 5, est arithmétique de raison 1.
4. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Propriété :

Une suite (U_n) est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constant pour tout entier n . Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Théorème : Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante.

Théorème :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r . Alors : $u_n = u_0 + nr$.

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

Somme de termes consécutifs :

Théorème :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r . On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (U_n) , c'est - à - dire :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(\frac{n+1}{2} \right) (u_0 + u_n).$$

3. Suites géométriques

3.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (U_n) est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q . On a donc : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le réel q est alors appelé raison de la suite.

Exemples :

1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, est géométrique de raison 2.
2. La suite définie par : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$ est géométrique de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$.
3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison (-1) .

Propriété : Une suite (U_n) est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante pour tout entier n . Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Théorème : Soit (U_n) une suite géométrique de raison q . Alors : $u_n = u_0 \times q$. $u_n = u_p \times (q)^{n-p}$.

Somme de termes consécutifs

Théorème : Soit (U_n) une suite géométrique de raison q (avec $q \neq 1$). On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (U_n) , c'est - à - dire :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right).$$

Suites convergentes :

On dit qu'une suite (U_n) admet pour limite un réel L lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Lorsqu'une suite (U_n) admet une limite finie, on dit qu'elle est convergente (ou qu'elle converge). Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Unicité de la limite : Si une suite converge alors sa limite est unique.

Compatibilité avec l'ordre :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes de limites respectives L et L' .

Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n < v_n$ (ou bien $u_n \leq v_n$) alors $L \leq L'$.

Théorème

On considère trois suites (U_n) , (V_n) et (W_n) .

Si (U_n) et (W_n) sont convergentes vers un même réel L et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors (V_n) est elle aussi convergente vers L .

CHAPITRE 6

Exercice 1

Partie I :

SUITES NUMÉRIQUES EXERCICES

U_1 , U_n , r et S_n désignant respectivement le premier terme, le $n^{\text{ième}}$ terme, la raison et la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, calculer :

1. U_n et S_n , connaissant : $U_1 = 7$; $n = 120$; $r = 5$.
2. U_1 et S_n , connaissant : $U_n = 326$; $n = 72$; $r = 2$.
3. r et S_n , connaissant : $U_1 = 397$; $U_n = 64$; $n = 1000$.
4. n et U_n , connaissant : $U_1 = 50$; $r = -4$; $S_n = 330$.
5. n et r , connaissant : $U_1 = -3$; $U_n = 6$; $S_n = 28,5$.
6. U_1 et U_n , connaissant : $n = 54$; $r = 4$; $S_n = 270$.

Partie II

Calculer dans le cas suivant d'une suite géométrique :

1. U_n et S_n , connaissant : $U_1 = 2$; $q = 3$; $n = 5$.
2. q et S_n , connaissant : $U_1 = 162$; $U_n = 32$; $n = 5$.
3. U_1 et S_n , connaissant : $U_n = 54$; $q = 3$; $n = 4$.
4. U_1 et U_n , connaissant : $q = 0,5$; $n = 7$; $S_n = 571,5$.

Exercice 2

1. Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes définie par :
a- $U_n = 3n - 8$; b- $V_n = -5n + 4$; c- $W_n = 7n - 3$.
2. Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Préciser son premier terme U_0 et sa raison.
3. Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $t_{n+1} = \frac{t_n + 4}{3}$.

On pose $K_n = t_n - 2$; montrer que (K_n) est une suite géométrique dont déterminera la raison et le premier terme.