

SUITES NUMÉRIQUES :

Définition :

On appelle une suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, elle peut être définie par une forme explicite.

Exemple : $U_n = 2n^2 + 3$ ou par une forme récurrence :

Exemple : $U_{n+1} = -U_n + 2$; $U_{n-1} = U_{n-2} + 7$

On dit que U_n est croissante si $U_{n+1} \geq U_n$ et décroissante si non ; U_n est constante si et seulement si $U_{n+1} = U_n$. Quel que soit n appartenant à un intervalle I donné.

Pour savoir :

Le sens de variations de la suite U_n

1^{ère} méthode : On fait la différence $U_{n+1} - U_n$: et on analyse le signe :

- Si $U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors U_n est croissante.
- Si $U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors U_n est décroissante.
- Si $U_{n+1} - U_n = 0$ alors U_n est constante.

2^{ème} méthode : On peut aussi calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et comparer avec 1.

Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$: U_n est croissante. Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$: U_n est décroissante. Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$: U_n est constante.

N.B : Cette deuxième technique n'est utilisable que si les termes de la suite U_n sont tous strictement positifs au moins à partir d'un certain rang. La 1^{ère} est donc une méthode générale.

1) Suites Arithmétiques et suites géométriques

1) Suites arithmétiques :

a) Définition : Une suite U_n est dite arithmétique si elle s'écrit sous la forme récurrence

$U_{n+1} = U_n + r$, avec r un réel appelé la raison de la suite U_n et un 1^{er} terme qui est à définir : Généralement on choisit U_0 ou U_1 comme 1^{er} terme.

b) Mise en évidence :

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $U_{n+1} - U_n$ si on trouve un réel indépendant de n on conclut que U_n est arithmétique en prenant le soin de préciser la raison qui est ce réel trouvé et le 1^{er} terme.

Exemple : $(U_n) : \begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = -\frac{4}{3}n - 2 \end{cases}$ Montrer que (U_n) est arithmétique :

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{3}(n+1) - 2 + \frac{4}{3}n + 2 = -\frac{4}{3} \in \mathbb{R} \text{ indépendant de } n \text{ donc la suite } U_n \text{ est arithmétique de}$$

raison $r = -\frac{4}{3}$ et de 1^{er} terme $U_1 = 2$.

c) Expression de U_n en fonction de n : Forme explicite :

Soit U_n une suite arithmétique de raison r et 1^{er} terme U_k la forme explicite de U_n est :

$$U_n = U_k + (n - k)r.$$

- Si le 1^{er} terme est U_0 par exemple alors $U_n = U_0 + nr$.
- Si le 1^{er} terme est U_1 alors $U_n = U_1 + (n - 1)r$.

N.B : la raison d'une suite arithmétique r détermine le sens de variations de U_n .

* Si $r \leq 0$: U_n est décroissante.

* Si $r \geq 0$: U_n est croissante.

* Si $r = 0$: U_n est constante.

Exemple :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{4}{3} \\ U_1 = 2 ; r = -\frac{4}{3} \end{cases} ; U_n = U_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}n + \frac{10}{3}.$$

d) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit à calculer $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{i=0}^n U_i$.

$$S_n = U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + \dots + (U_0 + nr) = (n+1)U_0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Or on établit aisément par récurrence que : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ce qui conduit à

$$S_n = (n+1)U_0 + \frac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\left(U_0 + \frac{nr}{2}\right) = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}.$$

Remarque : On dit que des réels a , b et c se suivent dans cet ordre dans une progression arithmétique si $b = \frac{a+c}{2}$.

Exemple : Dire si 1 ; 3 et 5 se suivent dans cet ordre dans une progression arithmétique.

Même exercice pour les nombres suivants :

a) 2 ; -3 et -8 ? b) $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{3}$ et $\frac{13}{3}$? c) -3 ; 2 et -8 ? d) 2i ; 2(i - e) et -4e + 2i.

2) Suites géométriques :

a) Définition :

La suite V_n est qualifiée de géométrique si $V_{n+1} = q V_n$.

Le réel q est appelé la raison de V_n , le 1^{er} terme de V_n est à définir on prend généralement V_0 ou V_1 .

b) Mise en évidence :

Pour montrer qu'une suite V_n est géométrique il faut et il suffit de montrer que le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n} \in \mathbb{R}$ et

indépendant de n . Si ce rapport est un réel indépendant de n on conclut que V_n est géométrique.

Exemple : Montrer que V_n est géométrique on précisera la raison et le 1^{er} terme.

$$\begin{cases} V_0 = 2e \\ V_{n+1} = 2e^{n+1} \end{cases} \text{ On a : } \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2e^{n+1}}{2e^n} = e \approx 2,718 \in \mathbb{R} \text{ indépendant de } n, \text{ donc } V_n \text{ est une suite}$$

géométrique de raison $q = e$ et le 1^{er} terme $V_0 = 2e$.

c) Forme explicite d'une suite géométrique V_n en fonction de n :

Une suite géométrique (V_n) de raison q et de 1^{er} terme V_k s'écrit : $V_n = V_k (q)^{n-k}$

Si $V_k = V_0$ alors, $V_n = V_0 q^n$. Si $V_k = V_1$ alors, $V_n = V_1 q^{n-1}$.

d) Somme des termes d'une suite géométrique :

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n = \sum_{i=0}^n V_i = V_0 + V_0 q + V_0 q^2 + \dots + V_0 q^n = V_0 + V_0 (q + q^2 + \dots + q^n).$$

Et q $S_n = q (V_0 + V_0 (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n))$.

$$\text{Donc : } S_n - q S_n = V_0 (1 - q) + V_0 (q - q^2) + V_0 (q^2 - q^3) + \dots + V_0 (q^n - q^{n+1})$$

$$S_n (1 - q) = V_0 (1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + q^3 - \dots + q^n - q^{n+1}) = V_0 (1 - q^{n+1}).$$

$$\text{Par suite : } S_n = V_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right].$$

N.B : On peut utiliser la raison q pour déduire le sens de variations d'une suite géométrique.

Si tous les termes de la suite sont positifs alors

- Si $q \geq 1$ alors, V_n est croissante.
- Si $q \leq 1$ alors, V_n est décroissante.
- Si $q = 1$ alors, V_n est constante.

II) Analyse de la convergence d'une suite :

1) Suite convergente et suite divergente :

► Une suite (U_n) est convergente si elle admet une limite finie en plus l'infinie : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$

Avec L est réel on dit que (U_n) converge vers le réel L .

Exemple : $U_n = e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. On dit que (U_n) converge vers e .

- Une suite est dite divergente si elle n'admet pas limite finie en l'infinie :
Soit la limite n'existe pas de même la suite est divergente.

2) Suite majorée et suite minorée :

- Une suite U_n est majorée par le réel M si pour tout n on a : $U_n \leq M$.
On dit que M est majorant de la suite.

Propriété : Une suite majorée et croissante est nécessairement convergente.

- Une suite U_n est minorée par le réel m si pour tout n on a : $U_n \geq m$.
On dit que m est le minorant de la suite.

Propriété : Une suite minorée et décroissante est nécessairement convergente.

Pour montrer qu'une suite (U_n) est majorée on étudie le signe de $U_n - M$.

Si $U_n - M \leq 0$, on conclut que U_n est majorée par M .

De même si $U_n - m \geq 0$, on conclut que U_n est minorée par m .

3) Théorèmes sur les limites :

a) Limites et opérations :

Toutes les propriétés sur la limite d'une somme, d'un produit et la limite d'un quotient des fonctions sont les mêmes pour les suites. La différence est que les limites des suites se calculent uniquement au voisinage de $+\infty$.

Les cas d'indétermination se traitent au cas par cas :

Utilisation d'expression conjuguée ; mise en facteur ; la règle de dominance expo domine puissance de x qui à son tour domine $\ln$

Propriété : U_n et V_n on des suites convergentes si à partir d'un certain indice on a :

$U_n \leq V_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$: cette propriété permet de comparer les limites des suites.

b) Théorème : L est un nombre réel, U_n ; V_n et W_n des suites numériques.

Suites divergentes :

- Si à partir d'un certain indice on a : $U_n \geq V_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.
► Si à partir d'un certain indice on a : $U_n \leq V_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$.
► Si à partir d'un certain indice on a : $V_n \leq U_n \leq W_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$.

Exercice : étudier la convergence de la suite $U_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$.

Solution : Soit n un entier naturel on peut encadrer la suite U_n à l'aide de deux suites convergentes :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} \leq \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{n^2 + 1}{n^2} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) = 1, \text{ alors, } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1. \text{ La suite } U_n$$

converge vers 1.

Exercice : Etudier la convergence de $U_n = \frac{-1}{n} \sin(n)$; $V_n = e^{\cos(n)}$ et $W_n = n - \ln(n)$.

Solution : On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{n} \times (1) \leq \frac{-1}{n} \sin(n) \leq \frac{-1}{n} \times (-1) \Leftrightarrow \frac{-1}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

On a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{\cos(n)} \leq e^1$.

Limites de suites de terme général q^n :

- Si $|q| < 1 \Leftrightarrow -1 < q < 1$ alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$: q^n converge vers 0.

- Si $q \leq -1$ alors, q^n n'admet pas de limite : q^n diverge.

Calculons les limites des suites suivantes $U_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n$, $V_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ et $W_n = (-2)^n$.

■ $U_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n \cdot U_n$ et sous la forme q^n et $q = \frac{-1}{3}$ donc, $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0$.

■ $V_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot V_n$ et sous la forme q^n et $q = \frac{3}{2}$ donc, $q > 1$ alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

■ $W_n = (-2)^n \cdot W_n$ et sous la forme q^n et $q = -2 < -1$ alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$ n'existe pas.

4) Convergence de suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a ; b]$.

U_n est une suite à valeurs dans I ($U_n \in I$) définie par la formule de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$.

Si U_n est convergente alors sa limite est une solution α de l'équation $f(L) = L$.

III) La démonstration par récurrence :

Pour montrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$ à l'aide de la récurrence :

- 1) On vérifie que la proposition est vraie à l'étape initiale n_0 (rang initial) éventuellement au rang suivant.
- 2) On suppose que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre n et traduire ce que cela veut dire, puis montrer que la vérification de la proposition à l'ordre n conduit aussi à sa vérification à l'ordre $n+1$.
- 3) On conclut que la proposition est vraie à l'ordre n c'est-à-dire pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 1

Soit (U_n) :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2 \end{cases}$$

1. Représenter les 1^{er} termes de la suite.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 4$.
En déduire que (U_n) est majorée.
3. Montrer que U_n est croissante et conclure quant à sa convergence.
4. Déterminer la limite de U_n .

Exercice 2

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)V_n$.

1. Calculer V_2, V_3 et V_4 .
2. a - Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a $V_n > 0$.
b- Démontrer que la suite (V_n) est décroissante.
c- En déduire que la suite (V_n) est convergente.
3. Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{V_n}{n}$, ($n > 0$).
a- Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser la raison et le 1^{er} terme.
b- Exprimer U_n puis V_n en fonction de n .
c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Exercice 3

On considère la suite U_n définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 4 - e^{-U_n} \end{cases}$$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $3 < U_n < 4$.
2. a - Montrer que pour tout entier naturel non nul n ,
 $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n+1}$ sont de même signe.
b- En déduire le sens de variations de la suite (U_n) .
3. Etudier la convergence de la suite (U_n) .

Exercice 4

On considère la suite de terme général (U_n) défini par : $U_n = \frac{-1+3U_{n-1}}{1+U_{n-1}}$; ($n \geq 3$) et pour son 1^{er} terme

$U_2 = 3$.

1. Calculer U_3, U_4 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. a - Montrer que (U_n) est minorée par 1.
b- Montrer que (U_n) est décroissante.
c- En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. On pose $V_n = \frac{1+U_n}{-1+U_n}$.
a- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison.
b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

Exercice 5

On considère la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}$$

On admet que $U_n > 0$, pour tout entier naturel n .

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n < 1$.
2. Démontrer que (U_n) est croissante et convergente.
3. On pose $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b- Exprimer V_n en fonction de n . En déduire que $U_n = \frac{3^n}{1+3^n}$.
c- Calculer la limite de (U_n) .