

CHAPITRE 2

PROBABILITÉS

I Principe fondamentale de dénombrement

Introduction

* **Question** : Combien de code peut – on former à l'aide d'une voyelle suivie d'un nombre parmi 1,2 et 3 ?

* **Réponse** : Il y a 6 voyelles a, e, i, o, u et y, donc pour choisir une voyelle, on dispose de 6 possibilités. Pour chaque voyelle il y a 3 possibilités de choisir parmi 1, 2 et 3.

Donc le nombre de codes possibles est : $N = 6 \times 3 = 18$.

Propriété

Si une situation de dénombrement nécessite p choix $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$ et si :

- ▶ Le choix C_1 peut produire n_1 résultats possibles ;
- ▶ Le choix C_2 peut produire n_2 résultats possibles ;
- ▶ Le choix C_3 peut produire n_3 résultats possibles ;
- ▶ et ainsi de suite ;

Alors la situation de dénombrement peut se faire de $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$ manières différentes.

Exemple

1. Déterminer le nombre de mots de 3 lettres choisies parmi 26 lettres (ayant un sens ou non).
Pour en constituer un, on choisit successivement :
 - ◆ Une première lettre dans l'alphabet : 26 choix.
 - ◆ Une deuxième lettre dans l'alphabet : 26 choix.
 - ◆ Une troisième lettre dans l'alphabet : 26 choix.Il y a donc $26^3 = 17576$ mots distincts de 3 lettres.
2. Un numéro d'appel d'un réseau téléphonique est constitué de 8 chiffres. Il s'ensuit que la capacité de ce réseau téléphonique est : 10^8 .

Application

1. De combien de manières peut – on garer 4 voitures dans 4 places vides dans un parking ?
2. On lance un dé 2 fois de suite. Quelles sont les résultats possibles ?
3. On considère les chiffres suivants : 5 – 6 – 7 – 2 – 3.
On veut former les entiers naturels de trois chiffres distincts deux à deux parmi ces chiffres.
 - a- Quel est le nombre de cas possibles ?
 - b- Combien de nombres pairs peut – on former ?
 - c- Combien de multiples de 5 peut – on former ?

II Arrangement et combinaison

1. Arrangement avec répétition

Introduction

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Si on lance ce dé 3 fois de suite, alors chaque possibilité est un triplet (a, b, c) où a, b et c sont choisis parmi les éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Toutes possibilité est appelé arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 6 (éventuellement un élément de l'ensemble E peut apparaître plusieurs fois).

D'après le principe fondamental de dénombrement, le nombre total de possibilités est :

$$N = 6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

Propriété

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal (nombre d'éléments) $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $1 \leq p \leq n$.

Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments de E est le nombre noté n^p .

Exemple

Le nombre de mots de passe de 8 symboles qu'on peut créer avec 66 caractères est : 66^8 .

Chaque mot de passe représente un arrangement avec répétition de huit éléments choisis parmi 66.

2. Arrangement sans répétition

Introduction

On veut former un nombre n de 3 chiffres $n = c d u$ choisis parmi 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On exige de plus que tous les chiffres soient distincts deux à deux. Toute possibilité est un triplet (a, b, c) où a, b et c sont distincts deux à deux et choisis parmi mes éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Toute possibilités est appelée arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 6.

D'après le principe fondamental de dénombrement, le nombre total de possibilités est :

$$N = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Ce nombre est noté : A_6^3 , donc : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Propriété :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal (nombre d'éléments) $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $1 \leq p \leq n$.
Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments de E est le nombre noté A_n^p donné par :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1).$$

Exemple

1. Un club de 32 membres doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

Question : Quel est le nombre N de bureaux possibles ?

Chaque bureau peut être considérée comme un arrangement sans répétition de 3 objets pris parmi 32 objets, et donc le nombre de bureau possibles est : $N = A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30 = 29760$.

2. Combien d'équipe de football (onze joueurs) peut-on constituer avec les vingt-six membres de l'équipe en tenant compte de la place des joueurs ?

Chaque équipe peut être considérée comme un arrangement sans répétition de 11 objets choisis parmi 26 objets. Par suite, le nombre d'équipe demandé est : A_{26}^{11} .

Remarque :

Si $n = p$, alors tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n est appelé permutation à n éléments.

Le nombre de permutation à n éléments est : $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Ce nombre est noté n ! qu'on lit factoriel n, donc : $n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n$.

Exemple :

1. Le nombre de possibilités ranger 5 livres dans 5 tiroirs de sorte que chaque tiroir ne peut contenir plus d'un livre est : 5 !
2. Le nombre de façons de placer 30 élèves sur 30 chaises dans une salle est le nombre de façons de permuter les 30 élèves sur les 30 chaises, c-à-dire 30 !

Remarque :

► On convient que : $0! = 1$ et $A_n^0 = 1$.

► On a pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$: $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

En particulier, on a : $A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

Application

1. Déterminer le nombre d'entier naturels de trois chiffres distincts deux à deux, constitués à partir des chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.
2. Un sac contient 11 boules répartis comme suit : 4 noires, 5 bleues et 2 jaunes.
On tire successivement et sans remise 3 boules de sac.
 - a- Quel est le nombre de tirages possibles ?
 - b- Quel est le nombre de possibilité d'obtenir :
 - i- Trois boules noires ?
 - ii- Trois boules de même couleur ?
 - iii - Deux boules noires et une seule blanche ?
 - iv - Une noire, une bleue et une jaune dans cet ordre ?
3. Avec les lettres du mot « IZENZARN » employées une fois chacune, combien peut-on former de mots (avec ou sans sens) ?
4. Calculer : A_{10}^8 , A_{20}^7 , A_{2025}^1 , A_n^2 , A_{2025}^{2025} .

3 Combinaison

Introduction

Soit p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre personnes, on doit constituer une équipe de 2 personnes pour participer à une réunion.

Les choix possibles sont : $\{p_1; p_3\}, \{p_1; p_2\}, \{p_1; p_4\}, \{p_2; p_3\}, \{p_2; p_4\}$. Donc le nombre total de possibilités est 6, c'est la combinaison de 2 éléments parmi 6, noté C_6^2 , donc $C_6^2 = 6$.

Propriété

Le nombre de combinaison de p éléments pris parmi n éléments distincts est le nombre d'ensemble de p objets pris parmi les n objets de départ. Ce nombre est noté : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemple

1. Lors d'un recrutement pour 4 postes de travail, se présentent 8 hommes et 6 femmes.

Déterminer nombre de recrutement distincts possibles :

Il y a $8 + 6 = 14$ candidats possibles. Donc le nombre de recrutement distincts est :

$$C_{14}^4 = \frac{14!}{4!(14-4)!} = 1001.$$

2. Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules noires et une boule blanche. On tire simultanément trois boules de l'urne.

a- Le nombre de tirage possibles est : $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$.

b- Le nombre de triages avec exactement 2 boules noires est : $C_3^2 \times C_3^1 = 15$.

c- Le nombre de tirages avec une boule de chaque couleur est : $C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1 = 12$.

Remarque :

- Soit n et p deux entiers naturels tel que : $p < n$. On a les propriétés suivantes :

- La symétrie : $C_n^p = C_n^{n-p}$. En particulier : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- Formule de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

- Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul. On a alors la formule suivante dite

« Formule de binôme de Newton » : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

Application :

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

1. Quel est le nombre de choix possibles ?
2. Quelle est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?
3. Quel est le nombre de choix si l'on impose de deux garçons ?

Différents types de tirages

Types de tirage	Ordre	Nombre de tirages possibles
Simultanés	L'ordre n'intervient pas	C_n^p
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	A_n^p
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	n^p

III Vocabulaire des probabilités

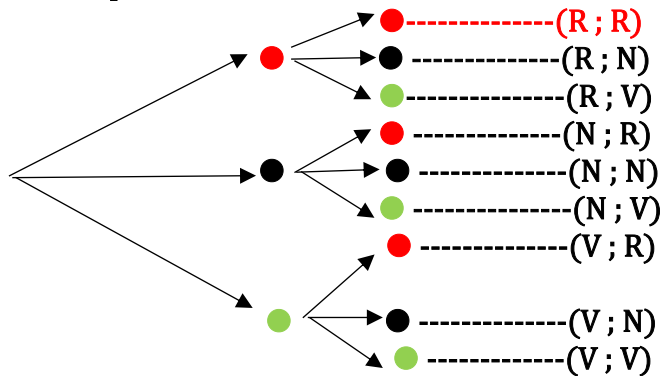
- **L'expérience aléatoire** : Expérience dont le résultat ne peut pas connu avec certitude.
- **Univers des possibilités** : L'ensemble de toutes les possibilités d'une expérience aléatoire qu'on noté Ω . On pose $\Omega = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$, n est appelé cardinal de Ω , on écrit : $n = \text{card}(\Omega)$.
- **Événement** : Est toute partie de A de Ω . Les singletons de Ω (les parties formées d'un seul élément) sont appelés événement élémentaire.

- **Événement contraire** : D'un événement A noté $\bar{A}$ est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On dit qu'un événement A est réalisé si le résultat de l'expérience donne issue à une possibilité appartenant à A. ϕ est appelé événement impossible et Ω événement certain.
- **Événements in compatibles** : Deux événements A et B sont dit incompatibles si et seulement si : $A \cap B = \phi$. On a : $A \cap \bar{A} = \phi$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.
- **Événement** $A \cap B$: est l'événement A et B.
- **Événement** $A \cup B$: est l'événement A ou B.

Exemple :

Une urne contient trois boules : Une boule rouge, une boule noire et une boule verte : notées en série R, N et V. On tire au hasard 2 boules successivement et avec remise dans l'urne.

1. Dresser un arbre pondéré convenable à cette expérience aléatoire :
Un arbre permet modéliser une situation, on peut aussi visualiser toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire à l'aide de l'arbre ci - dessous.



2. Déterminer l'univers des possibilités Ω de cette expérience :
 $\Omega = \{(R ; R) ; (R ; N) ; (R ; V) ; (N ; R) ; (N ; N) ; (N ; V) ; (V ; R) ; (V ; N) ; (V ; V)\}$
On a donc : $\text{Card}(\Omega) = 9$.
3. On considère les événements suivants :
 - ◆ A : « tirage de deux boules de couleurs différentes »
 - ◆ B : « la première boule tirée est rouge »
 - ◆ C : « les deux boules tirées sont rouges »
 - ◆ D : « tirage au moins une boule noire »

a- Déterminer en détail les événements A, B, C et D :

On a : $A = \{(R ; N), (R ; V), (N ; R), (N ; V), (V ; R), (V ; N)\}$. Et on a $\text{card}(A) = 6$.

On a : $B = \{(R ; N), (R ; V), (R ; R)\}$. Et on a : $\text{card}(B) = 3$.

On a : $C = \{(R ; R)\}$. C est un événement élémentaire. Et on a $\text{card}(C) = 1$.

On a : $D = \{(N ; R), (R ; N), (N ; V), (V ; N), (N ; N)\}$. Et on a $\text{card}(D) = 5$.

b- Déterminer en détail les événements suivants : $A \cap B$, $C \cap D$, $A \cup B$ et $\bar{D}$.

■ On a : $A \cap B = \{(R ; N), (R ; V)\}$. Et on a : $\text{card}(A \cap B) = 2$.

■ On a : $A \cap C = \phi$. A et C sont deux événements incompatibles. Et on a : $\text{card}(A \cap C) = 0$.

■ On a : $A \cup B = \{(R ; N), (R ; V), (N ; R), (N ; V), (V ; R), (V ; N), (R ; R)\}$. Et on a : $\text{Card}(A \cup B) = 7$.

■ On a : $\bar{D} = \{(R ; R), (V ; V), (R ; V), (V ; R)\}$. Et on a : $\text{card}(\bar{D}) = 4$.

Application

Une urne contient 3 étiquettes de couleur rouge numérotées de chiffres 1, 2, 3 et deux étiquettes noires numérotées de chiffre 4, 5.

On tire au hasard successivement et sans remise deux étiquettes de l'urne.

1. Déterminer en détail l'univers des possibilités de Ω .
2. Déterminer en détail les événements suivants :
 - A : « tirage de deux étiquettes de couleurs différentes »
 - B : « tirage de deux étiquettes dont la somme de chiffre est égale à 4 »
 - C : « la première étiquette tirée est numéroté du nombre 2 »
 - D : « tirage de deux étiquettes dont la somme des chiffres est inférieure ou égale à 4 »

E : « tirage au moins une étiquette noire »

3. Déterminer en détail l'événement contraire $\bar{A}$ de l'événement A.
4. Déterminer en détail l'événement $A \cap C$.
5. Déterminer en détail l'événement $A \cup C$.
6. Montrer que les deux événements A et B sont incompatibles.

Propriété

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire et soit A et B deux événements de Ω . On a :

$$\blacklozenge \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \quad \blacklozenge \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \blacklozenge \bar{A} = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}).$$

IV Notion de probabilité

1 Probabilité d'un événement

Définition

Pour étudier une population statistique, on détermine les fréquences f_i pour tous les résultats possibles de caractère x_i .

Si le nombre des éléments de la population est assez grand, la fréquence de chaque résultat possible se stabilise à un nombre quelconque f_i qui appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

Si on choisit au hasard un élément x_i de population. La probabilité d'obtenir x_i est la fréquence f_i et on écrit : $f_i = P_i$.

P_i est la probabilité de l'événement élémentaire $\{x_i\}$.

Résultats

Soit Ω un univers des possibilités fini d'une expérience aléatoire.

On pose $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

■ $f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1$, d'où $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$.

■ La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires que le forment, on la note $P(A)$.

Exemple :

On lance un dé cubique pipé dont ces faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que la probabilité d'apparition de 6 est le double de la probabilité de chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5.

1. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire : On lance le dé une fois, alors l'univers des possibilités est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et pour $i \in \Omega$ on pose P_i est la probabilité de l'événement élémentaire : « apparition d'une face portant le chiffre i ».

On a donc : $P_6 = 2P_1 = 2P_2 = 2P_3 = 2P_4 = 2P_5$ et $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$.

On conclut donc que : $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{7}$ et $P_6 = \frac{2}{7}$.

2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

a- A : « obtenir un nombre pair »

On a : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, alors $P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

b- B : « obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 »

On a : $B = \{1 ; 3\}$, alors $P(B) = P_1 + P_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$.

c- C : « obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3 »

On a : $C = \{4 ; 6\}$, alors $P(C) = P_4 + P_6 = \frac{3}{7}$.

d- D : « obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair »

On a : $D = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$, alors : $P(D) = P_2 + P_3 + P_4 + P_6 = \frac{5}{7}$.

Application

On jette une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite.

1. Déterminer la liste de tous les résultats possibles.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Le tirage ne comporte que des piles »
B : « Le tirage comporte au moins une fois face ».

2. Hypothèse d'équiprobabilité

Définition

On appelle hypothèse d'équiprobabilité toute situation dans les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales.

Exemple

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard des boules indiscernables au toucher, les issues ont la même probabilité de réalisation, on dit qu'on est en présence d'une situation d'équiprobabilité.

Théorème

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ tel que :

- ◆ Card (A) est le nombre des cas qui réalisent l'événement A.
- ◆ Card (Ω) est le nombre des cas possible.

Exemple :

Une urne contient 4 boules rouges numérotées 1 – 1 – 2 – 2 et trois boules noires numérotées 1 – 2 – 2. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles : Puis que le tirage des 3 boules s'effectue simultanément, alors chaque possibilité est une combinaison de trois éléments parmi 7 d'où :
 $\text{Card}(\Omega) = C_7^3 = 35$.

2. Calculer la probabilité de chacun des événements ci – dessous :

a- A : « tirage de 3 boules de même couleur » :

Pour que l'événement A se réalise il faut tirer 3 boules rouges ou 3 boules noires.

$$\text{D'où : } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^3 + C_3^3}{35} = \frac{4+1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

b- B : « tirage de 3 boules qui portent le même chiffre » :

Pour que l'événement B se réalise il faut tirer 3 boules portant le chiffre 1 ou 3 boules portant le chiffre 2.

$$\text{D'où : } P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^3 + C_3^3}{35} = \frac{1}{7}.$$

c- C : « tirage d'une boule rouge seulement » :

Pour que l'événement C se réalise il faut tirer une seule boule rouge et deux boules noires.

$$\text{D'où : } P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^1 \times C_3^2}{35} = \frac{12}{35}.$$

d- D : « tirage d'au moins une boule qui porte le chiffre 2 » :

Pour que l'événement D se réalise il faut tirer une boule qui porte le chiffre 2 et deux boules portant le chiffre 1 ou deux boules qui portent le chiffre 2 et une boule qui porte le chiffre 1 ou trois boules qui portent le chiffre 2.

$$\text{D'où : } P(D) = \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_4^1 + C_3^3}{35} = \frac{18+12+1}{35} = \frac{31}{35}.$$

e- E : « tirage d'une boule rouge qui porte le chiffre 1 » :

Pour que l'événement E se réalise il faut tirer une seule boule rouge qui porte le chiffre 1.

$$\text{D'où : } P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_5^2}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

Application

Une caisse contient 3 boules rouges, 5 boules vertes et 2 boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise 3 boules de la caisse.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a- A : « Tirage de 3 boules de même couleur »
 - b- B : « Tirage de 3 boules de couleurs différents »
 - c- C : « Triage d'une boule rouge dans le second tirage »
 - d- D : « Tirage d'au moins une boule verte »
 - e- E : « Tirage d'au maximum une boule noire ».

Propriété

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur Ω . Soit A et B deux événements de Ω . On a :

- ◆ $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$. ◆ $0 \leq P(A) \leq 1$.
- ◆ Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- ◆ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$.
- ◆ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple :

Une urne contient 4 boules rouges numérotées 1 – 2 – 2 – 2 et 3 boules noires numérotées 2 – 2 – 3. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : « tirage d'une boule noire » ; B : « tirage d'une boule qui porte le chiffre 2 »
 C : « tirage d'une boule rouge » ; D : « tirage d'une boule qui porte le chiffre 3 »
 E : « tirage d'une boule qui porte un chiffre impair ».

1. Calculer les probabilités suivantes : P (A), P (B) et $P(A \cap B)$.

On tire au hasard une boule de l'urne, alors l'univers des possibilités contient 7 possibilités, c'est – à – dire : $\text{Card}(\Omega) = 7$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher alors on a l'hypothèse d'équiprobabilité d'où :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{7}; \quad P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{7} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{7}.$$

2. En déduire la probabilité de l'événement $(A \cup B)$:

$$\text{On a l'égalité : } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ alors : } P(A \cup B) = \frac{3}{7} + \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{6}{7}.$$

3. Calculer la probabilité $P(D \cap C)$:

On a : $C \cap D = \emptyset$ c'est – à – dire que les deux événements C et D sont incompatibles.

$$\text{Et on a : } P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{7} \text{ et } P(D) = \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{7}. \text{ D'où } P(C \cap D) = P(C) + P(D) = \frac{5}{7}.$$

4. Calculer la probabilité P (E) :

$$\text{L'événement contraire de l'événement E est B, d'où : } P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}.$$

Application

Un appareil, fabriqué en très grand série, peut présenter deux sortes de défauts désignés par D₁ et D₂.

Dans un lot de 1000 appareils, on constate que 70 appareils ont le défaut D_1 , 60 appareils ont le défaut D_2 et 30 appareils ont les deux défauts.

Un client achète un appareil (au hasard).

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- ◆ A : « L'appareil a les deux défauts » ; ◆ B : « L'appareil a au moins un défaut »
- ◆ C : « L'appareil n'a pas de défaut » ; ◆ D : « L'appareil le défaut D_1 et n'a pas le défaut D_2 »
- ◆ E : « L'appareil le défaut D_2 et n'a pas le défaut D_1 » ; F : « L'appareil a un seul défaut ».

V Probabilité conditionnelle : L'indépendance

1 Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements d'un univers de possibilités Ω tel que $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement « A si B » ou « A sachant B », le quotient

$$\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)} \text{ noté } P_B(A) \text{ ou } P(A/B) \text{ c'est - à - dire : } P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple :

Une caisse contient 5 boules rouges, 4 boules noires et 3 boules vertes. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise 2 boules de la caisse.

1. Déterminer le nombre des résultats possibles :

Chaque tirage est un arrangement sans répétition de deux éléments parmi 12 d'où :

$$\text{Card}(\Omega) = A_{12}^2 = 132.$$

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

a- A : « La première boule tirée est rouge » :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_7^1 \times A_5^1 + A_5^2}{132} = \frac{5}{12}.$$

b- B : « La deuxième boule tirée est noire sachant que la première est rouge » :

On considère l'événement suivant D : « la deuxième boule tirée est noire »

$$\text{On a : } P(B) = P\left(\frac{D}{A}\right) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{A_5^1 \times A_4^1}{A_7^1 \times A_5^1 + A_5^2} = \frac{4}{11}.$$

c- C : « La deuxième boule tirée est verte sachant que la première est rouge » :

On considère les deux événements suivants : E : « la deuxième boule tirée est verte » et

F : « La première boule tirée est noire »

$$\text{On a : } P(C) = P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{A_3^1 \times A_4^1}{132}}{\frac{A_4^1 \times A_8^1 + A_4^2}{132}} = \frac{3}{11}.$$

Théorème

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\text{◆ } P(A \cap B) = P(B) \times P\left(\frac{A}{B}\right). \quad \text{◆ } P(A \cap B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right).$$

Application :

Un centre de santé se propose de dépister une maladie auprès d'une population de 1000 individus.

On dispose des données suivantes :

- La proportion des personnes malades est de 10 %.
- Sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif.
- Sur 100 personnes non malades, une seule personne a un test positif.
- On choisit une personne au hasard et on la soumet à un test de dépistage.
- On note M : « la personne est malade » et T : « la personne a un test positif »
- E : « L'appareil a un seul défaut ».

1. Déterminer la probabilité qu'une personne malade ait un test positif, ainsi que la probabilité qu'une personne malade ait un test négatif.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne non malade ait un test négatif, ainsi que la probabilité qu'une personne non malade ait un test positif.
3. Déterminer la probabilité des événements ci – dessous :
 - E : « la personne choisie a un test positif »
 - F : « la personne choisie est malade sachant qu'elle a un test négatif »

2 Indépendance de deux événements

Définition

Soit A et B deux événements de probabilités non nulle.

On dit que A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'affecte pas sur l'autre.

Théorème

Deux événements A et B de probabilités non nulle sont indépendants si et seulement s'ils vérifient la condition suivante : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque :

► A et B sont deux événements indépendants, donc $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$ et $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$.

► Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

Exemple

On lance un dé non pipé une fois sur une table horizontale, ses faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les deux événements suivants :

◆ A : « Obtenir d'un chiffre multiple de 2 » ; ◆ B : « Obtenir d'un chiffre multiple de 3 ».

Est – ce que les deux événements A et B sont indépendants ?

On a : $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{3, 6\}$ et $A \cap B = \{6\}$.

Alors : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Alors : $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, D'où A et B sont indépendants.

Application

Une caisse contient 6 boules numérotées de 1, 1, 1, 2, 3, 4. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire de la caisse au hasard une boule.

1. Calculer les probabilités de chacun des deux événements suivants :

A : « obtenir une boule qui porte un chiffre pair »

B : « obtenir une boule qui porte un chiffre inférieur ou égale à 3 »

2. Est – ce que A et B sont indépendants ?

3 Indépendances des épreuves

Définition

On considère une expérience aléatoire constituée de n épreuves successivement. Si les issues d'une épreuve n'influencent pas sur les résultats des épreuves suivantes, on dit que l'expérience aléatoire est constituée d'épreuves indépendantes.

Exemple :

Les expériences suivantes sont constituées par des épreuves indépendantes :

► Jet une pièce de monnaie n fois successives $n \geq 2$ (chaque jet de la pièce est une épreuve).

► Jet d'un dé n fois successive $n \geq 2$.

Propriété

Soit A un événement de probabilité p lors d'une épreuve aléatoire, et n un entier naturel non nul. Lorsqu'on répète cette épreuve n fois de manière identiques et indépendantes, alors la probabilité que l'événement A soit réalise k fois exactement est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ où $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\}$.

Exemple :

On lance 10 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus.

■ La probabilité d'obtenir « le numéro 6 » trois fois exactement est : $C_{10}^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$.

■ La probabilité d'obtenir jamais « le numéro 6 » est : $C_{10}^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

■ La probabilité d'obtenir « le numéro 6 » une fois exactement est : $C_{10}^1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^9$.

VI La variable aléatoire ; loi de probabilité

1. La variable aléatoire

Définition

Soit une expérience aléatoire à un univers d'issues fini.

Si on associe chaque issue de l'expérience aléatoire à un nombre réel unique, on dit que nous avons défini une relation de Ω vers $\mathbb{R}$ appelée variable aléatoire notée généralement X.

Notation :

▣ L'ensemble $X(\Omega)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

▣ L'événement « X prend la valeur x_i » est noté $(X = x_i)$.

▣ L'événement « X prend les valeurs inférieurs ou égales à x_i » est noté $(X \leq x_i)$.

▣ L'événement « X prend les valeurs supérieurs ou égales à x_i » est noté $(X \geq x_i)$.

▣ L'événement « X prend les valeurs comprises entre x_i et x_j » est noté $(x_i \leq X \leq x_j)$.

▣ La probabilité de l'événement $(X = x_i)$ est notée $P(X = x_i)$.

Exemple :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée et on note le résultat.

1. Déterminer le nombre total d'issues :

$$\Omega = \{(PPP), (PPF), (PFP), (PFF), (FPP), (FPP), (FFP), (FFF)\}.$$

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le nombre côté « face » obtenu.

a- Déterminer les valeurs possibles de X :

Dans cette expérience aléatoire la face ne peut pas être jamais obtenu, 1 fois, 2 fois ou 3 fois, d'où les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2 et 3 et on écrit : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

b- Quelle est la probabilité l'événement $(X = 0)$?

$$\text{La probabilité de l'événement } (X = 0) \text{ est : } P(X = 0) = \frac{1}{8}.$$

c- Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 1)$?

$$\text{La probabilité de l'événement } (X = 1) \text{ est : } P(X = 1) = \frac{3}{8}.$$

d- Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 2)$?

$$\text{La probabilité de l'événement } (X = 2) \text{ est : } P(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

e- Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 3)$?

$$\text{La probabilité de l'événement } (X = 3) \text{ est : } P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Ω est un univers de possibilités d'une expérience aléatoire.

X est une variable aléatoire définie sur Ω qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i (avec $1 \leq i \leq n$), la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

Remarque

Si on veut déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X , on détermine tout d'abord l'univers des issues Ω , on dénombre toutes les valeurs possibles de X , on calcule toutes les probabilités d'événements ($X = x_i$) et on présente les résultats dans un tableau sous la forme suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3		x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3		P_{n-2}	P_{n-1}	P_n

Exemple :

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire de la caisse au hasard et simultanément 3 boules.

X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de boules tirées qui portent un chiffre pair.

1. Déterminer le nombre d'issues possibles :

Le nombre de possibilités est : $\text{Card}(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

2. Écrire en détail l'ensemble $X(\Omega)$:

Les valeurs possibles de X sont :

▣ 0 si les trois boules tirées portent un chiffre impair.

▣ 1 si parmi les 3 boules tirées une seulement qui porte un chiffre pair.

▣ 2 si parmi les 3 boules tirées une seulement qui porte un chiffre impair.

▣ 3 si les trois boules tirées portent un chiffre pair.

On écrit donc : $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X : On a :

$$\blacksquare P(X = 0) = \frac{\text{Card}(X = 0)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

$$\blacksquare P(X = 1) = \frac{\text{Card}(X = 1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.$$

$$\blacksquare P(X = 2) = \frac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^2 \times C_5^1}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.$$

$$\blacksquare P(X = 3) = \frac{\text{Card}(X = 3)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

Le tableau suivant donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

4. Quelle est la probabilité de l'événement $(X \leq 2)$?

L'événement $(X \leq 2)$ est : tirage de 3 boules portent un chiffre impair ou 2 boules portent un chiffre impair et une boule porte un chiffre pair ou une boule porte un chiffre impair et 2 boules qui portent un chiffre pair.

$$\text{D'où : } P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}.$$

Application

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire au hasard et successivement et avec remise deux boules de l'urne. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer le nombre d'issues possibles.
2. Déterminer les valeurs possibles de X .
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
4. Quelle est la probabilité de l'événement $(X \leq 2)$?

VII Espérance mathématique ; Variance ; écart type

1 L'espérance mathématique

Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est intuitivement la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle se note $E(X)$, se lit « Espérance de X » et est donnée par la relation suivante :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n.$$

Exemple :

Si on considère la loi de probabilité de la variable aléatoire suivante :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$.

2 La variance

Définition

La variance d'une variable aléatoire X est notée $V(X)$ et est donnée par la relation suivante :

$$V(X) = (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2) - [E(X)]^2.$$

Exemple :

Dans la loi de probabilité de la variable aléatoire X ci - dessus :

La variance de X est : $V(X) = 0^2 \times \frac{1}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{5}{12} + 3^2 \times \frac{1}{12} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}$.

3 L'écart - type

Définition

L'écart - type d'une variable aléatoire X, notée σ , est la racine carrée de la variance. On a :

$$\sigma = \sqrt{V(x)}.$$

Remarque :

L'écart - type donne la dispersion des valeurs de X par rapport à l'espérance.

Application

Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires.

On tire une boule au hasard et on répète l'opération avec remise.

Soit X le nombre de boules blanches obtenues en 6 tirages.

1. Préciser la loi X, on donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs de $P(X = k)$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir :
 - a- 5 boules blanches en 6 tirages.
 - b- Au plus 4 boules blanches en 6 tirages.
 - c- Ni plus de 5 boules ni moins de 2 boules en 6 tirages.
3. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On suppose dans cette question que : $P(A) = 0,7$ et $P(B) = 0,85$ et $P(A \cup B) = 0,9$.

a- Calculer : $P(A \cap B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$ et $P(\overline{A \cap B})$.

b- Calculer : $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A/B)$ et $P(B/A)$.

c- Les événements A et B sont – ils indépendantes ? justifier.

2. On suppose dans cette question que : $P(\bar{A}) = 0,36$; $P(\bar{B}) = 0,74$ et $P(\overline{A \cap B}) = 0,27$.

a- Calculer : $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ et $P(B/A)$.

b- Calculer : $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

c- Calculer : $P(B/A)$, $P(A/B)$ et $P(\bar{A}/\bar{B})$.

d- Les événements A et B sont – ils indépendantes ? justifier.

3. On suppose dans cette question que : $P(A \cap B) = 0,3$, $P(\bar{B}) = 0,58$ et $P(B/A) = \frac{6}{13}$.

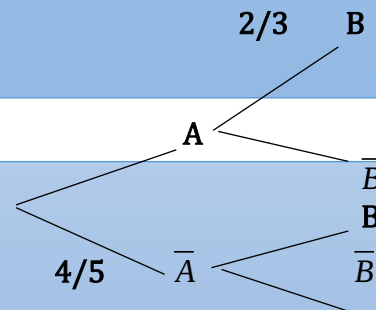
a- Calculer : $P(\bar{A} \cap B)$.

b- Calculer : $P(A)$ et $P(A/B)$.

c- Calculer : $P(A \cup B)$.

Exercice 2

Soit A et B deux événements associés à une expérience aléatoire. On considère l'arbre suivante :



1. Calculer $P(A)$ et $P(\bar{B}/A)$.

2. Compléter l'arbre par les probabilités manquantes sachant que : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$.

3. Calculer $P(B)$.

4. Les événements A et B sont – ils indépendantes ?

Exercice 3

Une maladie atteinte 1 % d'une population donnée. Un teste de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs.
- Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs.

On choisit au hasard un individu de cette population. On considère les événements suivants :

- T : « Le teste est positif »
- M : « L'individu choisit est malade »

1. Construire un arbre pondéré, et calculer $P(\bar{M})$, $P(\bar{T})$ et $P(T/M)$.

2. Calculer $P(T \cap M)$ et $P(\bar{M} \cap \bar{T})$ et en déduire $P(T)$.

3. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que cet individu soit malade ?

Exercice 4

Un sac S_1 contient 5 boules rouges et 3 boules noires. Un sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire au hasard une boule. (Il y a équiprobabilité dans le choix des sacs). On considère les événements :

■ S_1 : « Choisir le sac S_i où $i \in \{1; 2\}$ »

■ R : « Obtenir une boule rouge »

■ N : « Obtenir une boule noire ».



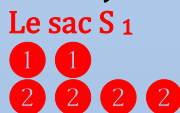
1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de choisir le sac S_2 et obtenir une boule rouge.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge.
4. Sachant que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 ?

Exercice 5

▣ Un sac S_1 contient 2 jetons portant le numéro 1 et 4 jetons portant le numéro 2.

▣ Un sac S_2 contient 3 boules rouges et 4 boules vertes.

Toutes les boules et les jetons sont indiscernables au toucher.



1. On tire au hasard un jeton de S_1 .
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 ► A : « Le jeton tiré porte le numéro 1 »
 ► B : « Le jeton tiré porte le numéro 2 »
2. On considère l'expérience aléatoire suivants :
 On tire au hasard un jeton de S_1 et on note son numéro :
 ♦ Si ce numéro est 1, on tire au hasard une boule de S_2 .
 ♦ Si ce numéro est 2, on tire au hasard et simultanément deux boules de S_2 .
 Soit E_n l'événement : « obtenir exactement n boules rouges » où $n \in \{1; 2\}$.
 - a- Montrer que : $P(E_1) = \frac{11}{21}$ et $P(E_2) = \frac{2}{21}$.
 - b- Sachant qu'on obtienne une seule boule rouge, calculer la probabilité pour que le jeton tiré de S_1 porte le numéro 1.

Exercice 6

On considère un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Un sac contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



On tire au hasard et simultanément deux boules du sac puis on lance le dé.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- ▲ A : « obtenir deux boules rouges et le n^o 5 »
- ▲ B : « obtenir deux boules vertes et un numéro pair »
- ▲ C : « obtenir deux boules de couleurs différentes et un multiple de 3 »

Exercice 7

► Une urne U_1 contient 5 boules rouges et trois boules noires.

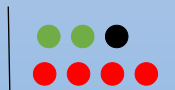
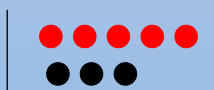
► Une urne U_2 contient 4 boules rouges, 2 boules vertes et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 .

L'urne U_1

L'urne U_2



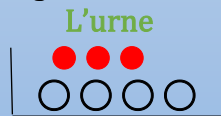
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- ▣ A : « obtenir 3 boules de même couleur »

- B : « obtenir 2 boules rouges exactement »
- C : « obtenir une boule de chaque couleur »,

Exercice 8

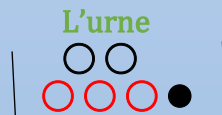
Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne : on répète cette épreuve 9 fois de suite. (Tirage successif avec remise de 9 boules).



1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge deux fois exactement.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge 6 fois exactement.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au moins fois.

Exercice 9

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules blanches et une boule noire. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



1. On tire au hasard successivement et avec remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - A : « obtenir 3 boules de couleur deux à deux distincts (une boule de chaque couleur). »
 - B : « obtenir 3 boules de même couleur »
 - C : « obtenir 2 couleurs exactement »
 - D : « obtenir 2 boules rouges exactement »
2. On tire maintenant au hasard successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C et D.
3. On tire maintenant au hasard simultanément 3 boules de l'urne.
 - a- Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C et D.
 - b- Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage de 3 boules. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 10

Un sac contient :

- 3 jetons blancs numérotés : 1 ; 1 ; 2.
- 4 jetons rouges numérotés : 1 ; 1 ; 2 ; 2.
- 5 jetons verts numérotés : 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3.

Toutes les jetons sont indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard successivement et avec remise 4 jetons du sac.
 - a- Calculer la probabilité d'obtenir 4 jetons de même couleur.
 - b- Calculer la probabilité d'obtenir un seul jeton blanc.
 - c- Calculer la probabilité d'obtenir 4 jetons portant le même numéro.
 - d- Calculer la probabilité d'obtenir un seul jeton vert et un seul nombre pair.
2. On tire au hasard successivement et sans remise 4 jetons du sac.
 - a- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - A : « obtenir 4 jetons de même couleur »
 - B : « obtenir un seul jeton rouge »
 - C : « obtenir exactement deux jetons verts numérotés 2 »
 - D : « obtenir 4 jetons portant le même numéro »
 - E : « obtenir un seul jeton rouge et un seul nombre impair »
 - b- Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 4 jetons associe le nombre de jetons verts qui portent un nombre impair. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. On tire maintenant au hasard simultanément 4 jetons du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D et E.

4. On considère le jeu suivant :
 On tire au hasard successivement et sans remise deux jetons du sac. On gagne si on obtient deux jetons verts portant le numéro 2.
 Omar a joué 3 fois de suite à ce jeu (Elle remet les 2 jetons tirés dans le sac avant le tirage suivant).
- a- Quelle est la probabilité que Omar gagne 3 fois ?
 - b- Quelle est la probabilité que Omar gagne une fois exactement ?
 - c- Omar désire jouer n fois de suite à ce jeu pour que la probabilité de l'événement G : « Omar gagne au moins une fois » soit strictement plus grand que 0,999.
 Déterminer la plus petite valeur de n .

Exercice 11

Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires. On suppose que les boules ont la même probabilité d'être tirées.

1. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Soit A et B les deux événements :

▲ A : « les deux boules tirées sont noires »

▲ B : « parmi les deux boules tirées, il y a au plus une boule noire »

Montrer que : $P(A) = \frac{7}{12}$ et $P(B) = \frac{8}{15}$.

2. Dans cette question, on considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire une boule de l'urne ; si cette boule est blanche, on s'arrête, et si cette boule est noire, on tire de l'urne une deuxième boule et dernière boule.

On considère les deux événements :

► C : « obtenir une boule blanche au premier tirage »

► D : « obtenir une boule blanche »

- a- Calculer la probabilité de l'événement C .

- b- Montrer que la probabilité de l'événement D est $\frac{8}{15}$.

Exercice 12

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2.

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables aux touches.

On considère l'expérience suivante :

On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 , ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte.

On considère les événements suivants :

● A : « la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 »

● B : « le produit ab est égal à 2 ».

1. a- Calculer $P(A)$; la probabilité de l'événement A .

b - Montrer que $P(B) = \frac{1}{4}$ (on peut utiliser l'arbre des possibilités)

2. Calculer $P(A/B)$; probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab .

a- Montrer que $P(X = 0) = \frac{1}{3}$.

b- Donner la loi de probabilité de X (Remarque que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 et 4).

- c- On considère les événements :

M : « le produit ab est pair non nul » et N : « le produit ab est égal à 1 ».

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.