

SCIENCES GÉNÉRALES

CHAPITRE 10

NOMBRES COMPLEXES

I. Définition :

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que:

- Il existe dans $\mathbb{C}$ 1 élément noté i tel que : $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$, ou $x + iy$, vérifiant l'égalité $i^2 = -1$, et a, b, x et y étant des réels quelconques.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul. Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre Z .
- $i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}; i^{4n} = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = i^{4n} \times i^2 = -1; i^{4n+3} = i^{4n} \times i^2 \times i = -i$.

Dans tout ce qui suit le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

II. Module et argument d'un nombre complexe.

1. Module d'un nombre complexe:

a) Définition:

Le module de $Z = a + bi$ est le nombre réel positif, noté $|Z| = r$ est défini par $|Z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ou bien si le point M est l'image du complexe $Z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on appelle module de Z , noté $|Z|$, la distance OM telle que: $|Z| = OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) Propriétés:

Soient Z et Z' deux nombres complexes.

- $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$.
- $|Z| = |-Z| = |\bar{Z}| = |-\bar{Z}| = \sqrt{Z \times \bar{Z}}$ quel que soit Z .
- $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$.
- $||Z| - |Z'|| \leq |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$.
- $|Z^n| = |Z|^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ avec $Z' \neq 0$.

Soient les points M et M' d'affixes respectives $Z = a + bi$ et $Z' = a' + b'i$.

- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$.

2. Argument d'un nombre complexe:

a) Définition:

Un argument du nombre complexe Z non nul est une mesure de l'angle polaire du point M dans le plan complexe muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, c'est à dire une mesure θ de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

b) Propriétés:

- $\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) [2\pi]$ et $|\bar{Z}| = |Z|$.
- $\arg(-Z) = \arg(Z) + \pi [2\pi]$ et $|-Z| = |Z|$.
- $\arg(Z^n) = n \times \arg(Z) + 2k\pi [k \in \mathbb{Z}]$.
- $\arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z') + 2k\pi [k \in \mathbb{Z}]$.
- $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') + 2k\pi [k \in \mathbb{Z}]$.

- $Z \times Z' = |Z| \times |Z'| \left[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \right]$.
- $\frac{Z}{Z'} = \frac{|Z|}{|Z'|} \left[\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta') \right]$.
- L'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ a pour mesure $\arg(Z_B - Z_A) [2\pi]$.
- L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ a pour mesure $\arg(Z_D - Z_C) - \arg(Z_B - Z_A) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi]$.

III Formes d'un nombre complexe:

1. Formes algébrique:

a) Définition:

La forme algébrique d'un nombre complexe Z est son écriture de la forme $Z = a + ib$ ou $Z = x + iy$ avec $(a; b)$ ou $(x; y)$ sont des réels.

a ou x est la partie réelle de Z , on note $\operatorname{Re}(Z) = a$ ou $\operatorname{Re}(Z) = x$.

b ou y est la partie imaginaire de Z , on note $\operatorname{Im}(Z) = b$ ou $\operatorname{Im}(Z) = y$.

b) **Propriétés:** Soit $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

- $Z = Z' \Leftrightarrow [a = a' \text{ et } b = b']$.
- $Z = 0 \Leftrightarrow [a = 0 \text{ et } b = 0]$.
- $Z + Z' = (a + a') + (b + b')i$.
- $Z + \bar{Z} = 2\operatorname{Re}(Z) = 2a$.
- $Z - \bar{Z} = 2i\operatorname{Im}(Z) = 2ib$.
- $|Z|^2 = Z\bar{Z} = [\operatorname{Re}(Z)]^2 + [\operatorname{Im}(Z)]^2 = a^2 + b^2$.
- $Z \times Z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.
- $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.

2. Forme Trigonométrique:

a) Définition:

La forme trigonométrique d'un nombre complexe Z est son écriture de la forme :

$Z = |Z| [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$ avec $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ étant son module;

$\arg(Z) = \theta + 2k\pi$; (θ étant son argument.

b) Formule de Moivre:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ On a : $[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$.

- $Z^n = |Z|^n [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = |Z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$.
- $Z^n + \bar{Z}^n = 2|Z|^n \cos(n\theta)$. $Z^n - \bar{Z}^n = 2i|Z|^n \sin(n\theta)$.

3. Forme exponentielle:

a) Définition:

La forme exponentielle d'un nombre complexe Z est son écriture de la forme $Z = |Z|e^{i\theta}$.

On déduit la forme exponentielle à partir de celle trigonométrique.

$Z = |Z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |Z|e^{i\theta} = re^{i\theta} = [r; \theta]$.

b) Propriétés:

- $Z = |Z|(\cos x + i \sin x) = |Z|e^{ix} = [|Z|; x]$.
- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta + 2k\pi$.
- $\frac{Z}{Z'} = \frac{|Z|e^{i\theta}}{|Z'|e^{i\theta'}} = \frac{|Z|}{|Z'|}e^{i(\theta-\theta')}$.

- $Z \times Z' = |Z| \times |Z'| \times e^{(\theta+\theta')i}$.
- $\bar{Z} = |Z|e^{-i\theta}$; $[e^{i\theta}]^n = e^{in\theta}$ ($n \in \mathbb{Z}$); $-e^{i\theta} = e^{(\pi+\theta)i}$.

c) Formules d'Euler:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

IV Représentation géométrique:

- L'axe des abscisses est l'ensemble des points M d'affixe un réel, on l'appellera aussi (axe des réels).
- L'axe des ordonnées est l'ensemble des points M d'affixe un imaginaire pur: on l'appellera aussi (axe des imaginaires purs)
- Un point M distinct de O est repéré de deux façons, soit par ses coordonnées cartésiennes (a;b) ou soit par ses coordonnées polaires (r ; θ).
- Soit M l'image du nombre complexe Z tel que $Z = a + i b$. On pose $OM = r$ avec $r \geq 0$. Le nombre $OM = r$ est appelé module de Z et noté $|Z|$.

Le nombre réel θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Cette mesure est définie à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$ et est appelée argument de Z et on écrit : $\arg(Z) = \theta + 2k\pi$.

V Racine n - ième d'un nombre complexe:

a) Définition Soit $Z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On appelle racine n - ème du nombre complexe

Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^n = Z$.

Rechercher les racines n - ième d'un nombre complexe

Z revient à résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation

(E) $z^n = Z$, $n \geq 2$.

Exemple : Soit à chercher les racines n - ième de Z.

En générale les racines n - ièmes d'un nombre complexe se déterminent par:

$$(\rho; r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2; (\theta; \alpha) \in \mathbb{R}^2. \begin{cases} Z = \rho [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] = [\rho; \theta] \\ z = r [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] = [r; \alpha] \\ z^n = r^n [\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)] = [r^n; n\alpha]. \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}. \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ et } \sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+^*.$$

N.B: Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées. De plus, ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.

- **Exemple:** Racines carrées $n = 2$; $k = \{0;1\}$

$$k = 0, z_0 = \left[\rho; \frac{\theta}{2} \right] = \rho \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

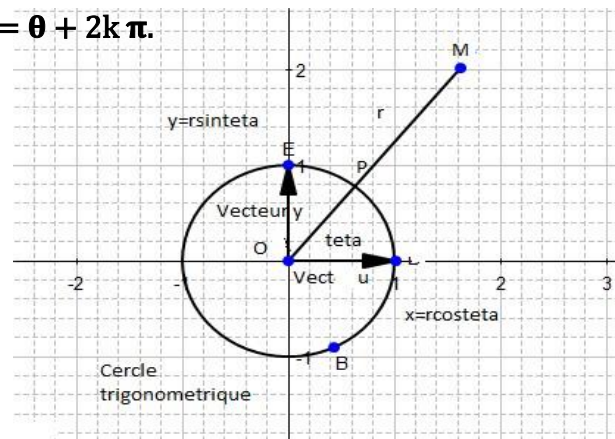
$$k = 1, z_1 = \left[\rho; \frac{\theta}{2} + \pi \right] = -z_0 = -\left[\rho; \frac{\theta}{2} \right].$$

- **Exemple:** Racines cubique, $n = 3$; $k = \{0;1;2\}$.

$$k = 0; z_0 = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3} \right] = \sqrt[3]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right].$$

$$k = 1, z_1 = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right]; k = 2, z_2 = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right] = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3} \right].$$

VI Racine n - ième de l'unité:



On appelle racine n -ième de l'unité une racine n -ième de 1, c'est-à-dire un nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On notera U_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité $U_n = \{x \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$. Les racines n -ièmes de l'unité sont de la forme $z_k = e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i} = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right]$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; n-1\}$. Ces racines sont situées au sommet d'un polygone régulier de n côtés.

VII Résolution d'équation dans $\mathbb{C}$:

Les méthodes de résolution sont souvent les mêmes que dans $\mathbb{R}$: Il faut d'abord essayer de factoriser, voir s'il y a une identité remarquable, chercher une racine évidente. On désire donc se ramener à des produits de facteurs du premier degré ou du second degré.

Remarque:

Il faut penser que $-1 = i^2$ et donc que $z^2 + 1$ est factorisable dans $\mathbb{C}$ alors qu'il ne l'est pas dans $\mathbb{R}$.

1. Résolution d'une équation du type $z^n = a$:

Si $n > 2$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(z; a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, on écrit z et a sous forme exponentielle. L'équation admet alors n solutions en donnant à k , n valeurs consécutives : $z = re^{i\theta}$ et $a = \rho e^{i\alpha}$;

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \text{ ou } z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \left[\sqrt[n]{\rho}; \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; n-1\} \text{ et } \sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+^*$$

2. Résolution d'une équation du premier degré:

Toute équation du premier degré d'inconnue z se ramène à : $az + b = 0$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ doit avoir une solution. Cette équation a pour solution $z = -\frac{b}{a}$.

3. Résolution d'une équation du second degré :

a) Δ coefficient réels:

Toute équation du second degré d'inconnue z se ramène à : $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Peut avoir un discriminant Δ soit $\{\Delta > 0; \Delta = 0; \Delta < 0\}$. Il y aura trois possibilités, d'avoir au moins une solution :

- Si $\Delta > 0$, alors $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

b) Δ coefficient au moins complexes:

Toute équation du second degré d'inconnue z se ramène à $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ peut avoir son discriminant une partie imaginaire. On calcule la racine carrée du discriminant Δ et on choisit l'une des racines trouvées: $\Delta = \delta^2$.

- Si $\Delta \neq 0$, alors $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution $z = -\frac{b}{2a}$.

Les autres propriétés sur les nombres complexes:

- Le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $Z_I = \frac{1}{2}(Z + Z')$.
- $Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im}(Z) = 0 \\ \arg(Z) = 0[\pi] \end{cases}$

- $Z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = ib \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(Z) = 0 \\ \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$
- Si $Z \neq 0, Z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(Z) = 0 \\ \arg(Z) = 0 [\pi] \end{cases}$
- Si $Z \neq 0, Z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(Z) = 0 \\ \arg(Z) = 0 [2\pi] \end{cases}$
- Si $Z \neq 0, Z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(Z) = 0 \\ \arg(z) = \pi [2\pi] \end{cases}$
- Si $Z \neq 0, Z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(Z) = 0 \\ \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$
- $MA = MB \Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de segment $[AB]$.
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow M$ appartient à la droite (AB) privée de tous les points de $[AB]$.
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 + k\pi \Leftrightarrow M$ appartient à la droite (AB) privée de A et B.
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow M$ appartient au segment $[AB]$ privée des points A et B.
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow M$ appartient à l'un des demi - cercles de diamètre $[AB]$, privée de A et de B.
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$, privé de A et de B.
- C, A et B sont alignés si et seulement si $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in i\mathbb{R}$.
- ABC est un triangle direct rectangle en A $\Leftrightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in i\mathbb{R}_+^*$.
- ABC est un triangle isocèle en A $\Leftrightarrow |Z_B - Z_A| = |Z_C - Z_A|$.
- ABC est un triangle rectangle isocèle en A $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$.
- ABC est un triangle équilatéral direct $\Leftrightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{\frac{i\pi}{3}}$.